MATRICES

NOTION DE MATRICE

Définitions

- **Définition-1**

Soit K un corps commutatif, on appelle matrice M à n lignes et p colonnes, ou matrice de type (n,p) à coefficients dans K, un tableau rectangulaire de la forme :

$$M = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow i^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow j^{\text{ème}} \text{ colonne} & \end{array}$$

NOTION DE MATRICE
Définitions

- **Définition-2**

Les a_{ij} s'appellent les éléments de la matrice. La matrice M, ainsi définie peut être notée

$$M = \left(a_{ij}\right)_{1\le i\le n,\ 1\le j\le p}$$

Si $K = \mathbb{R}$, la **matrice** est dite **réelle**

Si $K = \mathbb{C}$, la **matrice** est dite **complexe**

Si n = p , la **matrice** est dite **carré d'ordre n**

NOTION DE MATRICE
Définitions

- **Définition-3**

L'ensemble des matrices de type (n ,p) à coefficients dans *K* est notée $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.

L'ensemble des matrices carrés d'ordre n, à coefficients dans *K* , est notée $\mathcal{M}_n(K)$.

Le couple (n, p) est appelé **dimension** de la matrice

Une matrice de dimension (n,1) est une **matrice colonne**.

Une matrice de dimension (1,n) est une **matrice ligne**.

NOTION DE MATRICE

Exemples

- **Exemple-1: matrice rectangulaire**

$$A = \begin{bmatrix} a & 7{,}4 & \sqrt{5} \\ \frac{1}{5} & 5i & 5 \end{bmatrix}$$

2 lignes, 3 colonnes : type (2,3)

- **Exemple-2: matrice carrée**

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

2 lignes, 2 colonnes : type (2,2)
B est une matrice carrée d'ordre 2.

NOTION DE MATRICE

Exemples

- **Exemple-3: *matrice identité***

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ordre 2

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & 1 & 0 \\ 0 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ordre n (n lignes, n colonnes)

- **Exemple-4: *matrice nulle***

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

NOTION DE MATRICE

Exemples

- **Exemple-5:** ***matrice diagonale***

$$\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$$

- **Exemple-6:** ***matrice triangulaire***

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 13 & 0 & 0 \\ 14 & 15 & 16 & 0 \\ 17 & 18 & 19 & 20 \end{bmatrix}$$

supérieure **inférieure**

NOTION DE MATRICE

Opérations sur les matrices

- **Opération-1:** ***Produit par un nombre réel***

$A \in \mathcal{M}(n, p)$, $\lambda \in \mathcal{R}$

$D = \lambda . A$

$d_{ij} = \lambda a_{ij}$

Exemple

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ et $\lambda = 5$; $\quad D = 5.A = 5.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.1 & 5.2 \\ 5.3 & 5.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{bmatrix}$

NOTION DE MATRICE

Opérations sur les matrices

- **Opération-2 : Additions des matrices**
  - **Somme des matrices de même types**

  A $\in\mathcal{M}$ (n, p), B $\in\mathcal{M}$ (n, p)

  C = A + B

  $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$

  Exemple

$$A=\begin{bmatrix} 5 & a \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & b \end{bmatrix} \qquad C=A+B=\begin{bmatrix} 6 & a+d \\ 7 & b \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 5 & a & 9 \\ 7 & 0 & z \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & d & 5 \\ 0 & b & f \end{pmatrix} \qquad C=A+B=\begin{pmatrix} 6 & a+d & 14 \\ 7 & b & f+z \end{pmatrix}$$

NOTION DE MATRICE

Opérations sur les matrices

- **Opération-3 : *Produit de deux matrices***

  A $\in\mathcal{M}$ (**n**, **p**), B $\in\mathcal{M}$ (**p**, **q**)

  C = A x B

  C$\in\mathcal{M}$ (**n**, **q**)

$$C = \left[c_{ij}\right]_{1\le i\le n\,,\,1\le j\le q} \quad \text{avec} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Le produit n'est possible que si
le nombre de colonnes de A
est égale
au nombre de lignes de B

NOTION DE MATRICE

Opérations sur les matrices

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} \boxed{\boxed{}} & \boxed{\boxed{}} \\ \boxed{\boxed{}} & \boxed{\boxed{}} \end{bmatrix}$$

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} 1\times a+2\times b+3\times c & 1\times d+2\times e+3\times f \\ 4\times a+5\times b+6\times c & 4\times d+5\times e+6\times f \end{bmatrix}$$

NOTION DE MATRICE

Opérations sur les matrices

Propriétés

A x (B + C) = A x B + A x C

A x(B x C) = (A x B) x C

Remarques

1) En général, A x B ≠ B x A.
Il se peut même que B x A ne soit pas défini.

2) A x B = A x C ⇏ C = B

3) A x B = 0 ⇏ A = 0 ou B = 0

NOTION DE MATRICE

Opérations sur les matrices

Exemple

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

on aura $AB=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=A$ et $IA=AI=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=A$.

On remarque bien que

$A \times B \neq B \times A$.

$I \times A = B \times A$ *mais* $I \neq A$

$A \neq 0$ et $B \neq 0$ mais $A \times B = 0$.

NOTION DE MATRICE

Opérations sur les matrices

- **Opération-4 : *Transposition***

Soit M = [a_{ij}]. On appelle la transposée de M, notée ${}^tM$ = [a_{ji}], la matrice dont les éléments sont a_{ji}

Exemple

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad {}^tM = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

NOTION DE MATRICE

Opérations sur les matrices

Propriétés de la transposition

$^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

$^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$

$^t({}^tM) = M$

NOTION DE MATRICE

Matrices particulières

- **Matrice particulière – 1 : *Matrice scalaire***

Une matrice **A** carrée est dite ***scalaire*** si et seulement si

$$A = \lambda I.$$

où **I** est une matrice unité

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3I$$

NOTION DE MATRICE

Matrices particulières

- **Matrice particulière – 2 : *Matrice symétrique***

  Une matrice M est ***symétrique*** si et seulement si

  M = ^{t}M.

- **Matrice particulière – 3 : *Matrice antisymétrique***

  Une matrice M est ***antisymétrique*** si et seulement si

  M = - ^{t}M.

  Remarque

  Une matrice symétrique est forcément carrée.

NOTION DE MATRICE

Matrices particulières

- **Matrice particulière – 4 : *Matrice orthogonale***

  Une matrice **A** carrée est dite ***orthogonale*** si et seulement si

  A ^{t}A = ^{t}A A = I.

Exemple :

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{-4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{-7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

on vérifie bien que $A^t \,.\, A = A \,.\, A^t = I$

ma1

NOTION DE MATRICE

Matrices particulières

- **Matrice particulière – 5 : *Matrice normale***

Une matrice **A** carrée est dite ***normale*** si et seulement si

$$A\,{}^tA = {}^tA\,A$$

Exemple :

- Matrices symétriques
- Matrices orthogonales

NOTION DE MATRICE

Matrices particulières

- **Matrice particulière – 5 : *Matrice inversible***

Une matrice **A** carrée est ***inversible*** ou ***non singulière*** si et seulement si ∃ **B** tel que

$$B\,A = A\,B = I.$$

On note $B = A^{-1}$ appelé **matrice inverse** de A

Exemple

Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, cherchons $B=A^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

tel que B A = A B= I $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On trouve $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Diapositive 19

ma1 mehdi abid; 18/03/2020

NOTION DE MATRICE

Espace vectoriel $\mathcal{M}$ *(n, p)*

- **Propriété de $\mathcal{M}$ (n,p)**

$\mathcal{M}$ (n, p) muni de l'addition des matrices (LCI) et du produit par les nombres réels (LCE) est un espace vectoriel de dimension n p.

Une base de cet espace vectoriel est formée par les matrices ($I_{i,j}$).

($I_{i,j}$) est la matrice ayant l'élément 1 à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne et ne comportant que des zéros ailleurs.

NOTION DE MATRICE

Espace vectoriel $\mathcal{M}$ *(n, p)*

Exemple : Cas $\mathcal{M}$ (2,2)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \quad I_{11} + b \quad I_{12} + c \quad I_{21} + d \quad I_{22}$$

On vérifie facilement les quartes propriétés de la Loi de Composition Interne (LCI) et les quartes propriétés de la Loi de Composition Externe (LCE).

NOTION DE MATRICE

Applications linéaires (A. L.)

A. L. 1: *Lien entre matrices et applications linéaires*

– A toute matrice $M \in \mathcal{M}$ (**n**,**p**)
on peut associer une application linéaire f :

$$f : E = R^p \longrightarrow F = R^n$$

$$X \longrightarrow Y = M.X$$

NOTION DE MATRICE

Applications linéaires (A. L.)

A. L. 2: *Lien entre applications linéaires et matrices*

– A toute application linéaire
$f : E = R^p \longrightarrow F = R^n$,
on peut associer une matrice $M \in \mathcal{M}$ (**n**,**p**)
qui dépend du choix des bases
$\{ e_1, \ldots, e_p \}$ dans l'espace de départ (**E**)
$\{ f_1, \ldots, f_n \}$ dans l'espace d'arrivée (**F**).

NOTION DE MATRICE

Applications linéaires (A. L.)

A. L. 3: *Définition*

Soient E et F deux espaces sur K de dimensions p et n munis des bases respectives B_E et B_F

$\mathbf{B_E = \{ e_1, e_2, e_3, \ldots, e_p\}}$ et $\mathbf{B_F = \{ f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n\}}$

$$f : E \longrightarrow F$$

On appelle matrice de f par rapport aux bases B_E et B_F la matrice $M \in \mathcal{M}(n,p)$ dont la $j^{ième}$ colonne est constitué par les coordonnées du vecteur $f(e_j)$ relativement à B_F

NOTION DE MATRICE

Applications linéaires (A. L.)

$$f(e_1) = a_{11} f_1 + \cdots + a_{n1} f_n$$
$$\vdots$$
$$f(e_p) = a_{1p} f_1 + \cdots + a_{np} f_n$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} f(e_1) & \cdots & f(e_p) \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix} \end{array}$$

NOTION DE MATRICE

Applications linéaires (A. L.)

Exemple

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = (5x + 2y, 8x + 3y)$

$\{(1,0), (0,1)\}$, la base canonique de R^2

(la même base pour l'espace de départ et d'arrivée, $f_i = e_i$, $i = 1,2$).

$f(e_1) = f(1,0) = (5,8) = 5\,(1,0) + 8\,(0,1) = 5\,f_1 + 8\,f_2$

$f(e_2) = f(0,1) = (2,3) = 2\,(1,0) + 3\,(0,1) = 2\,f_1 + 3\,f_2$

Matrice associée à f :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

NOTION DE MATRICE

Applications linéaires (A. L.)

Exemple

$f : R^2 \rightarrow R^2$

$f(x, y) = (5x + 2y, 8x + 3y)$

$\{(1,1), (1,0)\}$ comme base de l'espace de départ et $\{(1,0), (0,1)\}$ comme base de l'espace d'arrivée.

$f(1,1) = (7,11) = 7\,(1,0) + 11\,(0,1)$

$f(1,0) = (5,8) = 5\,(1,0) + 8\,(0,1)$

Matrice associée à f :

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 11 & 8 \end{bmatrix}$$

NOTION DE MATRICE

Rang d'une matrice (rg)

Rg-1: ***Définition***

Le rang d'une matrice M est égale à la dimension de l'espace engendré par ses vecteurs colonnes

Exemple

$$\begin{array}{ccc} V_1 & V_2 & V_3 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad rg\,M = dim\left\{\overline{V_1,\ V_2,\ V_3}\right\}$$

Or $V_3 = V_2 + V_1 \Rightarrow \{V_1, V_2, V_3\}$ est lié

Mais $\{V_1, V_2\}$ est libre

donc **rg M = 2**

NOTION DE MATRICE

Rang d'une matrice (rg)

Rg-2: ***Définition***

Soient E et F deux espaces sur K de dimensions p et n munis des bases respectives B_E et B_F

$B_E = \{ e_1, e_2, e_3, \ldots, e_p\}$ et $B_F = \{ f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n\}$

$f : E \longrightarrow F$

Le rang de f est égale au rang de f par rapport aux bases B_E et B_F

$$rg\, f = dim\, Im\, f = dim\left\{\overline{f(e_1), f(e_2), \ldots\ldots, f(e_n)}\right\} = rgM$$

NOTION DE MATRICE

Changement de bases (Cb)

Cb-2: *Définition*

Soient E un espace sur K de dimensions *n*

$$B_E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\} \quad et \quad B_E' = \{f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$$

deux bases de E.

On appelle matrice de passage De B_E à B_E' la matrice ***P***$_{BB'}$ d'ordre n dont le j^{ième} colonne est formée des f_j par rapport à la base B_E, autrement dit

$$f_j = \sum_i a_{ij} e_i$$

La matrice de passage est alors

$$P_{BB'} = \left(a_{ij}\right)_{1 \le i, j \le n}$$

NOTION DE MATRICE

Changement de bases (Cb)

Exemple

Dans $\Re^2$ on peut définir deux bases

$$B_E = \{e_1, e_2\} = \{(1,0),(0,1)\} \quad \text{et} \quad B_E' = \{f_1, f_2\} = \{(1,1),(0,1)\}$$

Nous pouvons écrire

$$\begin{cases} f_1 = (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1) = 1e_1 + 1e_2 \\ f_2 = (0,1) = 0(1,0) + 1(0,1) = 0e_1 + 1e_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} e_1 = (1,0) = 1(1,1) - 1(0,1) = 1f_1 - 1f_2 \\ e_2 = (0,1) = 0(1,1) + 1(0,1) = 0f_1 + 1f_2 \end{cases}$$

D'où les matrices de passage de *B* à *B'* et de *B'* à *B*

$$P_{BB'} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} f_1 & f_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad P_{B'B} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} e_1 & e_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$